

14/10/2015

(AKA): Κάθε πρόταση υποκείμενη του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο

(ALE): Έστω $P(n)$ πρόταση η οποία εξαρτάται από το $n \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε:

$P(1)$: αληθής και $\forall n \in \mathbb{N}$: $P(n)$ αληθής $\Rightarrow P(n+1)$ αληθής. Τότε $P(n)$ αληθής $\forall n \in \mathbb{N}$

(AKA) $\Leftrightarrow$ (ALE)

(I) Έστω $P(n)$ πρόταση η οποία εξαρτάται από το $n \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε:

$P(1)$: αληθής και $\forall n > 1$ και για κάθε $m: 1 \leq m < n: P(m)$ αληθής $\Rightarrow P(n)$ αληθής.

Τότε η $P(n)$ ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$ ($P(n)$ αληθής) (Παίρνει η λογική: δεν θα χρησιμοποιούσε αυτό)

(II) Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$, όπου $n_0 > 1$ και έστω $P(n)$, $\forall n \geq n_0$ μια πρόταση για την οποία:

$P(n_0)$: αληθής και: είτε $P(n)$: αληθής $\Rightarrow P(n+1)$: αληθής για $n \geq n_0$,

τότε η $P(n)$: αληθής $\forall n \geq n_0$, είτε $\forall n \geq n_0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}: n_0 \leq m < n$:

$P(m)$ αληθής $\Rightarrow P(n)$ αληθής. Τότε η $P(n)$ αληθής $\forall n \geq n_0$.

4 περιπτώσεις μαθηματικής επαγωγής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ Η ακολουθία Fibonacci ορίζεται ως εξής:

$$F_1 = 1$$

$$F_6 = 8$$

$$F_2 = 1$$

$$F_7 = 13$$

$$F_3 = 2$$

$$F_4 = 3$$

$$F_5 = 5$$

$$\text{Αρα } F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n \geq 3 \quad (*)$$

① Θα αποδείξαμε ότι: $F_n < 2^n, \forall n \geq 1$

• $P(1)$: $F_1 = 1 < 2^1 = 2$ ισχύει

• Υποθέτουμε ότι η $P(n)$: αληθής, δηλαδή: $F_n < 2^n$ θα δείξουμε ότι η $P(n+1)$: αληθής δηλαδή $F_{n+1} < 2^{n+1}$

Από την (*): $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

$P(m)$: αληθής, $\forall m \in \mathbb{N} : 1 \leq m \leq n+1$ (Για να χρησιμοποιήσουμε την I περίπτωση επαγωγής)

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} < 2^n + 2^{n-1} < 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

$$\Rightarrow n \text{ } P(n+1) \text{ αληθής και άρα: } P(n): \alpha \lambda \eta \theta \acute{\eta} \varsigma \forall n \geq 1 \quad \square$$

② Θα αποδείξουμε ότι: $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n, \forall n \geq 1$ $\frac{7}{4} = 1.75$

$P(n): F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n, \forall n \geq 1$

∴

• $P(1): F_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1 = 1.75$: αληθής

• Επαγωγική Υπόθεση: Έστω $n \geq 1$ και υποθέτουμε ότι n $P(m)$: αληθής, $1 \leq m \leq n$, δηλαδή: $F_m < \left(\frac{7}{4}\right)^m \forall m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq n$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \left(\frac{7}{4} + 1\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \left(\frac{11}{4}\right) <$$

$$< \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^n$$

$\frac{11}{4} = 2.75$

$\left(\frac{7}{4}\right)^2 = 3.06$

Άρα $n \text{ } P(n)$ είναι αληθής $\forall n \geq 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n, \forall n \geq 1.$ □

③ Θα αποδείξουμε ότι: $F_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$, όπου $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \forall n \geq 1$

• $P(1): F_1 = 1$ $\frac{a^1 - b^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$: αληθής

• Επαγωγική Υπόθεση: $\forall n \geq 1, F_m = \frac{a^m - b^m}{\sqrt{5}}$, όταν $1 \leq m \leq n$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{a^{n-2} - b^{n-2}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} (a^{n-1} + a^{n-2} - b^{n-1} - b^{n-2}) =$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\text{πίδες: } \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} : a, b$$



$$(*) \begin{cases} a^2 = 1+a \\ b^2 = 1+b \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (a^{n-2}(1+a) - b^{n-2}(1+b)) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} (a^{n-2}a^2 - b^{n-2}b^2) = \frac{1}{\sqrt{5}} (a^n - b^n)$$

(*)

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (a^{n-2}a^2 - b^{n-2}b^2) = \frac{1}{\sqrt{5}} (a^n - b^n)$$

Επείδη

$$F_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}} \text{ Επείδη } n \in \mathbb{P}(n) \text{ αληθές.}$$

Άρα $n \in \mathbb{P}(n)$ αληθές $\forall n \geq 1$

□

Να υπολογισθεί η n -οστή δύναμη του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Επείδη A^n

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Παρατηρούμε: } A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$P(n): A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 2$$

• Η $P(n)$ είναι αληθής για $n=2, 3, 4$

• Γραμμικός Υπόδειγμα: $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$, Επείδη $n \in \mathbb{P}(n)$ αληθές

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$$

$\therefore P(n+1)$ η οποία είναι αληθής.
Άρα $P(n)$ αληθής $\forall n \geq 2$

□

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \quad \begin{array}{l} \text{χρυσή τομή} \\ \text{από τον Πεδίο το } \varphi \end{array}$$

$$P(t) = t^2 - t + 41$$

$$t = 1, 2, \dots, 40$$

$P(t)$: κυκλωποφικά πολυώνυμα
 $\Phi_n(t)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II: ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$

Ορισμός: Ο ακέραιος a διαιρεί τον ακέραιο b ($\Leftrightarrow$)

$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : b = c \cdot a$ και τότε θα γράψουμε: $a \mid b$.

Όταν ο a δεν διαιρεί τον b , δηλαδή δεν υπάρχει $c \in \mathbb{Z} : b = ca$, τότε θα γράψουμε $a \nmid b$

Παραδείγματα:

- $4 \mid -20$, διότι: $-20 = (-5)4$
- $15 \nmid 10$, διότι $\nexists c \in \mathbb{Z} : 10 = 15c$